Διαφορικές Εξισώσεις

8/12/16

Συστήματα με σταθ. συντελεστές

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\ \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right| \longrightarrow \left.\begin{aligned} y_1'' &= a_{11}y_1' + \dots + a_{1n}y_n' \\ y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \end{aligned}\right\} \longrightarrow y_1 = \dots$$

Παράδειγμα

$$(1):\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 \end{aligned}\right| \longrightarrow \left.\begin{aligned} y_1'' &= y_1' + y_2' = (y_1+y_2) + (3y_1+y_2) = 4y_1 + 2y_2 \\ y_1' &= y_1 + y_2 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot 1 \\ &\cdot(-2) \end{aligned} \quad \xrightarrow{(+)}$$

$$\longrightarrow y_1'' - 2y_1' = 2y_1$$

$\longrightarrow y_1'' - 2y_1' - 2y_1 = 0 \rightsquigarrow$ Βρίσκω την y_1 και έπειτα αντικαθιστώντας στην (1) ($y_2 = y_1' - y_1$) βρίσκω την y_2. (Δεν παραγωγίζω ξανά, για να κάνω την ίδια διαδικασία).

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_3' &= -3y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} y_1'' &= y_1' - y_2' - y_3' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' &= y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' &= 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' &= y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{aligned}\right| \longrightarrow \left.\begin{aligned} y_1'' - y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ y_1''' - 7y_1' &= -6y_1 - 12y_2 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot(-3) \\ &\cdot 1 \end{aligned} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

$$y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(y_1'' - y_1' - 2y_1\right) = \dots$$

$$y_3 = y_1 - y_2 - y_1' = \dots$$

Άσκηση 6.213

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' &= y_1 - y_2 - e^x \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} y_1'' &= y_1' + y_2' + e^x \\ y_1'' &= y_1 + y_2 + e^x + y_1 - y_2 - e^x + e^x = 2y_1 + e^x \end{aligned}$$

$$y_1'' - 2y_1 = e^x$$

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

$$y_1(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

Μερική λύση της $y_1'' - 2y_1 = e^x$

$$y_1 = ze^x \Rightarrow z''e^x + 2z'e^x + ze^x - 2ze^x = e^x$$

$$\Rightarrow z'' + 2z' - z = 1$$

$$z = -1$$

$$y_1^p = -e^x$$

$$y_1(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - e^x$$

Αλγεβρικά βρίσκω την y_2.

Άσκηση 5

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + x^2 \\ y_2' &= y_1 + y_3 + 1 \\ y_3' &= y_1 - y_3 - x \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\rightarrow y_1' + y_1 = x^2 \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}\left[c + \int x^2 e^x \, dx\right] \\ &\rightarrow \left.\begin{aligned} y_2' &= y_3 + (1 + y_1) \\ y_3' &= -y_3 + (y_1 - x) \rightarrow y_3' + y_3 = y_1 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

Άσκηση 4

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 + x & (1) \\ y_2' &= -y_2 + y_3 - 1 & (2) \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 + x^2 & \end{aligned}\right| \rightarrow y_1'' = y_2' + y_3' + 1 = -y_2 + y_3 - 1 + y_1 + y_2 - y_3 + x^2 + 1 = y_1 + x^2$$

Αφαιρώ από την (2) την (1) με πλέον γνωστή την y_1 και βρίσκω την y_2.

B-51

$b: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\exists c \geq 0: \int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \leq c \quad, x \geq 0$

$\rightsquigarrow e^{-x}\int_0^x e^t |b(t)|\,dt \leq c\,\frac{e}{e-1} \quad, x \geq 0$

$\rightsquigarrow$ όλες οι λύσεις της $y'' + 2y' + 2y = b$ είναι φραγμένες στο $[0,+\infty)$

$$e^{-x}\int_0^x e^t |b(t)|\,dt = e^{-x}\left\{ \int_{x-1}^x \overbrace{e^t}^{\text{αύξουσα}} \overbrace{|b(t)|}^{\text{μη αρνητική}}\,dt + \int_{x-2}^{x-1} e^t |b(t)|\,dt + \dots + \int_0^{x-[x]} e^t |b(t)|\,dt \right.$$

$$\leq e^{-x}\left\{ \underbrace{e^x \int_{x-1}^x |b(t)|\,dt}_{\leq c} + e^{x-1} \underbrace{\int_{x-2}^{x-1} b(t)\,dt}_{\leq c} + \dots + e^{x-[x]} \underbrace{\int_0^{x-[x]} b(t)\,dt}_{\leq \int_0^1 |b(t)|\,dt \ \leq c} \right\}$$

$$\leq c\, e^{-x} \cdot e^x \left\{ 1 + \underbrace{\frac{1}{e}}_{|x|\leq 1} + \dots + \frac{1}{e^{[x]}} \right\}$$

$$\leq c\,\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = c\,\frac{e}{e-1}$$

(*) Είναι λάθος να ξεκινήσω να "σπάω" τα ολοκληρώματα από το 0.

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

B.S.Λ $\{ \overbrace{e^{-x}\cos x}^{y_1(x) \to 0}, \overbrace{e^{-x}\sin x}^{y_2(x) \to 0} \}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\sin x \\ 1 & \cdots \end{vmatrix} = -e^{-x}\sin x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & 0 \\ \cdots & 1 \end{vmatrix} = e^{-x}\cos x$$

$$|y_p(x)| \leq |y_1(x)| \left|\int_0^x \frac{W_1(x)}{W(x)} b(s)\,ds\right| + \left|y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} b(s)\,ds\right|$$

$$\left|y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} b(s)\,ds\right| = \left|e^{-x}\cos x \int_0^x \frac{-e^{-s}\sin s}{e^{-2s}} b(s)\,ds\right|$$

$$= \left|-e^{-x}\cos x \int_0^x e^{s}\sin s\, b(s)\,ds\right|$$

$$\leq e^{-x}\int_0^x e^{s}|b(s)|\,ds \leq C \quad \frac{e}{e-1}$$

$$|y(x)| = |c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)| \leq |c_1| + |c_2| + |c_3|$$

H-W : B-59

Άσκηση B-53

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σταθερές α και δ έτσι ώστε, για κάθε λύση y της

$$y'' + 8y' + 25y = 2\cos x$$

να ισχύει: $\lim_{+\infty} [y(x) - \alpha\cos(x-\delta)] = 0$ (*)

Λύση

$\lambda^2 + 8\lambda + 25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

B.S. $\Lambda = \{ e^{-4x}\cos 3x,\ e^{-4x}\sin 3x \}$

Χρειάζεται να αποδείξω ότι για κάποια μερική λύση $y_p(x)$ υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε να ισχύει η (*)

$\rightsquigarrow$ $y_p(x) = \frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x$

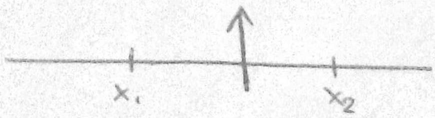
$$\sqrt{\left(\frac{3}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{40}\right)^2}\ \cos\theta = \frac{\frac{3}{40}}{\sqrt{\left(\frac{3}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{40}\right)^2}} = \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} & a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x) = \\ & \sqrt{a^2+b^2}\Big[\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\theta}\cos(\lambda x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\theta}\sin(\lambda x)\Big] \\ & = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cos(\lambda x) + \sin\theta\sin(\lambda x)\right) \\ & = \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos(\lambda x - \theta)\right] \end{aligned}}$$

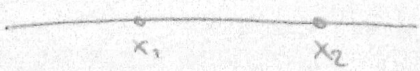
B-24

$\{y_1, y_2\}$ Β.Σ.Λ μιας ομογενούς γδ.ε με π.ο $(-\infty, \infty)$

$\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2.



$y_1(x_1) = 0 = y_2(x_2)$



$y_1(x) > 0$

$y_1(x_1) \neq 0$ | $y_1'(x_2) > 0$

$y_2'(x_0) \neq 0$ | $y_2'(x_2) > 0$

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) > 0$$

$x = x_1$: $-y_1'(x_1)\,y_2(x_1) > 0$

$x = x_2$: $-y_1'(x_2)\,y_2(x_2) > 0$

$$\underbrace{y_1'(x_1)\ y_1'(x_2)}_{<0}\ \underbrace{y_2(x_1)\ y_2(x_2)}_{\cancel{<}0} > 0$$

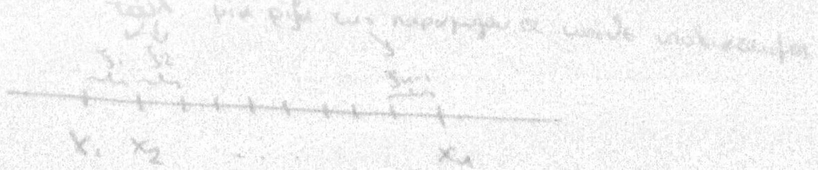
Από θ.Bolzano δεν έχει ρίζα στο (x_1, x_2).

B-25

$y'' + a y = 0$, $a : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ συνεχής $-\infty \le x_1 < x_2 \le +\infty$

$\rightsquigarrow$ οι ρίζες μιας (μη μηδενικής) λύσης είναι μεμονωμένες

(δηλ. κάθε σημείο του συνόλου των ριζών δεν είναι σ.σ. του συνόλου αυτού)



Ας είναι $\{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ ρίζες της λύσης y της εξίσωσης

δηλ. $y(x_\nu) = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$

Οι λύσεις είναι συνεχείς και 2 φορές παραγώγιμες.

$$\lim_{\nu \to \infty} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y(x_\nu)} = y(x_0) \Rightarrow y(x_0) : x_0 \text{ λύση}$$

Απ' το Rolle : $\xi_\nu \in (x_\nu, x_{\nu+1})$: $y'(\xi_\nu) = 0$

$\xi_\nu \to x_0$: $(\underset{\overset{\downarrow}{x_0}}{x_\nu} < \xi_\nu < \underset{\overset{\downarrow}{x_0}}{x_{\nu+1}}) \to \xi_\nu \to x_0$

y' : συνεχής, $\lim\limits_{\nu \to \infty} y'(\xi_\nu) = y'(x_0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{array}\right| \xrightarrow[\text{Μοναδικότητα}]{\text{Από Θεώρημα}} y = 0 \text{, άτοπο}$$

B-50

Γ.Ε : (ε): $y'' + 2ay' + a^2 y = b$, $a \in \mathbb{R}$, $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής

αν y : λύση της (ε) και $y(x) = \frac{y(x)}{(x)}$, $x > 0$

→ (a) Αν b : φραγμένη τότε y : φραγμ. στο $[0, +\infty)$

(b) $\lim\limits_{+\infty} b(x) = 0$ και $\lim\limits_{+\infty} y(x) = 0$

$y'' + 2ay' + a^2 y = 0$

$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$

$(\lambda + a)^2 = 0$

$\lambda = -a$ διπλή

Β.Σ.Λ $\{e^{-ax}, xe^{-ax}\}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-ax} & xe^{-ax} \\ -ae^{-ax} & e^{-ax} - axe^{-ax} \end{vmatrix} = e^{-2ax}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-ax} \\ 1 & \dots \end{vmatrix} = -xe^{-ax}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-ax} & 0 \\ \dots & 1 \end{vmatrix} = e^{-ax}$$

$$y_p(x) = \underbrace{y_1(x) \int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} b(s)\,ds}_{} + y_2(x) \int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} b(s)\,ds$$

$$\frac{e^{-ax}}{x} \int_0^x \frac{-se^{-as}}{e^{-2as}} b(s)\,ds$$

$$= \frac{e^{-ax}}{x} \int_0^x -s\,e^{as} b(s)\,ds$$

$$|\dots| \le \frac{e^{-ax}}{x} \int_0^x s e^{as} \overbrace{|b(s)|}^{\le M} ds \le \underbrace{\frac{e^{-ax}}{x} M \int_0^x s e^{as} ds}_{\text{φραγμένη}}$$

$\boxed{\text{H-W B-47/48/46 σαν την B-50}}$